FINANCES PUBLIQUES

J. 23 1364

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2024

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Liberté
Égalité
Fraternité

Tournez la page S.V.P.

NOTE AUX CANDIDATS

→ Passation de l'épreuve :

1. Sur les copies :
   - vous devrez **composer lisiblement sur les copies avec un stylo foncé :** bleu ou noir. Toute copie illisible lors de la numérisation du fait d'une encre trop claire **ne sera pas corrigée (l'usage de stylo à encre effaçable est fortement déconseillé) ;**
   - l'usage du surligneur et des stylos de couleurs est interdit ;
   - pour toute correction, il est recommandé de privilégier **un correcteur type ruban** plutôt que liquide.

2. Vous devrez numéroter votre composition correctement dans l'encadré en haut de la copie.
   Chaque numérotation doit contenir le numéro de la feuille et le nombre total de feuilles de votre composition. (Ex : 01/05 ; 02/05 ... 05/05).

3. **Vous devrez, sur chaque feuille A3, remplir en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : Nom de naissance, Premier prénom, Numéro de candidature, rempli de gauche à droite, et Date de naissance.**

Nom de naissance : N O M

Premier prénom : P R E N O M

Numéro candidature : 0 0 0 0 1 2 3 4 Né(e) le : 0 1 / 0 7 / 1 9 9 2

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : INSPECTEUR EXTERNE DES FINANCES PUBLIQUES Session : 2024

Epreuve n° : 2 Matière : Matière choisie à l'inscription

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Feuille : /

4. Il ne doit pas y avoir de rature dans le pavé d'identification. Si nécessaire, vous pouvez demander une feuille vierge au responsable de salle.

5. Vous devrez composer uniquement sur les supports de composition officiels de l'épreuve : les feuilles de format A3 comportant le bandeau d'identification.

6. **Notez que dans tous les cas, les feuilles ne doivent être ni découpées, ni agrafées, ni collées.**

Les copies sont anonymisées lors des opérations de scannage. Ainsi, les correcteurs n'ont aucune information sur l'identité du candidat.

→ Lors de la collecte des copies :

Vous devrez rendre **uniquement les feuilles de composition officielles.** Tout autre support (sujet, brouillon) sera écarté de la correction.

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;*
- *les règles graduées, équerres, compas, rapporteurs.*

Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}$.

1. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Pour la suite de l'exercice, on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Il n'est pas demandé de démontrer cette relation.

2a. Déterminez l'ensemble de définition D de f .

2b. Étudiez la continuité de f .

3a. Exprimez $f'(x)$ avec les fonctions usuelles.

3b. En déduire $f(x)$, puis la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE N° 2

Les trois questions suivantes (1., 2. et 3.) sont indépendantes.

1. On considère le triangle équilatéral ABC de longueur a et un point M situé à l'intérieur de ce triangle. On pose $S=d(M,(AB))+d(M,(AC))+d(M,(BC))$.

1a. Démontrez que $S=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

1b. En déduire que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est indépendante de M.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $I(-1,1)$, $J(3,-1)$ et $K(1,4)$.

2a. Déterminez une équation cartésienne de chacune des hauteurs issues du triangle IJK .

2b. Vérifiez que les hauteurs trouvées en 2a. sont concourantes et déterminez l'orthocentre du triangle IJK .

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminez l'ensemble des centres des cercles qui passent par le point $P(1,0)$ et qui possèdent deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en O .

EXERCICE N° 3

On considère un entier $n\geq 2$.

1. On considère l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des lois classiques + et x.

1a. Rappelez le théorème de Bezout.

1b. Montrez que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

2. Montrez que quel que soit l'entier x , les carrés des nombres x et $n-x$ sont congrus modulo n.

3. Pour cette question, on suppose que $n \geq 3$. On note $c : \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ l'application qui à un reste associe son carré modulo n.

3a. L'application c est-elle injective ?

3b. L'application c est-elle surjective ?

4. Établissez la table des carrés modulo 7.

5. Montrez que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solution entière (Indication : on pourra exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

EXERCICE N° 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2. Calculez $(A - I)^2$. Montrez, en utilisant la formule du binôme de Newton que pour tout entier naturel n :

$$A^n = nA + (1-n)I \ .$$

3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimez le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.

En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédant avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouvez A^n.

4a. Montrez que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - \mathrm{Id}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dont on exhibera une base notée (ϵ_2).

4b. Déterminez un vecteur ϵ_3 tel que $u(\epsilon_3) = \epsilon_2 + \epsilon_3$. Déterminez un vecteur propre ϵ_1 de u non colinéaire à ϵ_2.

4c. Montrez que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrivez la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage (matrice de passage et son inverse).

4d. Retrouvez A^n .